

Docente: Vincenzo Pappalardo
Materia: Matematica

Algebra

Disequazioni irrazionali

Consideriamo la seguente equazione irrazionale:

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad n \geq 2 \text{ intero}$$

Se n è dispari, l'equazione si risolve elevando alla potenza n -esima entrambi i membri dell'equazione:

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow A(x) = [B(x)]^n \quad \text{se } n \text{ è dispari}$$

esempio

$$\sqrt[3]{2x + x^3 + 1} = 1 + x \xrightarrow{n \text{ dispari}} \left(\sqrt[3]{2x + x^3 + 1} \right)^3 = (1 + x)^3$$

$$2x + x^3 + 1 = 1 + x^3 + 3x^2 + 3x \Leftrightarrow 3x^2 + x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

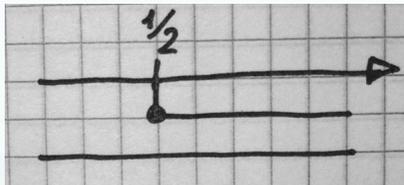
Se n è pari, l'equazione è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 & \text{condizione di esistenza del radicale} \\ B(x) \geq 0 & \text{condizione di concordanza di segno (il radicale deve essere positivo o nullo)} \\ A(x) = [B(x)]^n & \text{elevamento alla potenza } n\text{-esima di entrambi i membri dell'equazione} \end{cases}$$

esempio

$$\sqrt{2x^2 + x + 4} = 2x - 1 \xleftrightarrow{n \text{ pari}} \begin{cases} 2x^2 + x + 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 4 = (2x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathfrak{R} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Dovranno essere accettate solo le soluzioni che soddisfano la seguente condizione:

$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + x + 4 = (2x - 1)^2 \rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = 3$$

La soluzione $x = -1/2$ non è accettabile in quanto non soddisfa la condizione del sistema.

Consideriamo le seguenti disequazioni irrazionali:

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad e \quad \sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad n \geq 2 \text{ intero}$$

Se n è dispari, le disequazioni si risolvono elevando alla potenza n -esima entrambi i membri delle disequazioni:

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) < [B(x)]^n$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) > [B(x)]^n$$

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt[3]{2x + x^3 + 1} > 1 + x$$

L'indice è dispari ($n=3$), per cui eleviamo alla terza potenza entrambi i membri della disequazione:

$$\sqrt[3]{2x + x^3 + 1} > 1 + x \xleftrightarrow{\textit{n dispari}} \left(\sqrt[3]{2x + x^3 + 1}\right)^3 = (1 + x)^3$$

Effettuando i calcoli, otteniamo la seguente disequazione equivalente:

$$3x^2 + x > 0$$

la cui soluzione è:

$$x < -\frac{1}{3} \cup x > 0$$

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt[3]{x+6} < x$$

L'indice è dispari ($n=3$), per cui eleviamo alla terza potenza entrambi i membri della disequazione:

$$\sqrt[3]{x+6} < x \xrightarrow{n \text{ dispari}} \left(\sqrt[3]{x+6}\right)^3 < (x)^3$$

Effettuando i calcoli, otteniamo la seguente disequazione equivalente:

$$x^3 - x - 6 > 0$$

Regola di Ruffini: $x^3 - x - 6 > 0$

$$P(2) = 2^3 - 2 - 6 = 0$$

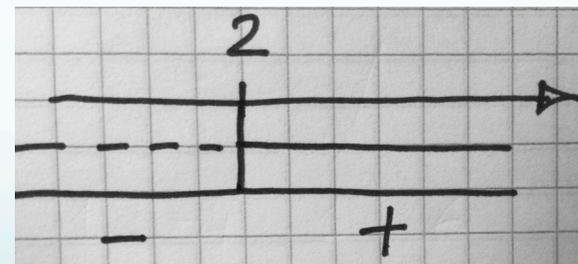
	1	0	-1	-6
2		2	4	6
	1	2	3	0

La disequazione diventa: $(x - 2)(x^2 + 2x + 3) > 0$

Risolviamola:

$$x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$$

$$x^2 + 2x + 3 > 0 \rightarrow \forall x \in \mathcal{R}$$



Soluzione: $x > 2$

Consideriamo la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \quad n = 2$$

La disequazione data è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 & \text{condizione di esistenza del radicale} \\ B(x) > 0 & \text{condizione affinché il radicale sia positivo o nullo} \\ A(x) < [B(x)]^2 & \text{in base al principio riportato in basso} \end{cases}$$

principio: se a e b sono due numeri reali positivi o nulli, la relazione di disuguaglianza che c'è fra i due numeri è la stessa che c'è fra i loro quadrati:

$$\forall a, b \geq 0 \Rightarrow a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

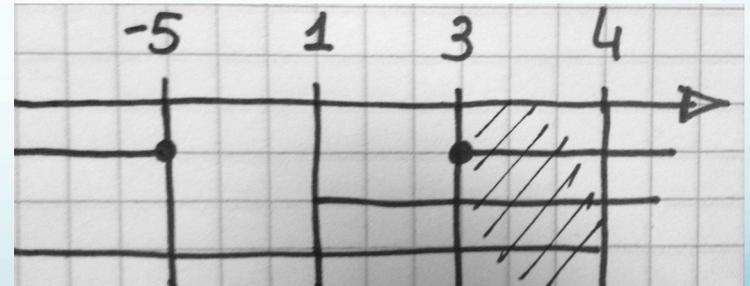
$$\sqrt{x^2 + 2x - 15} < x - 1$$

L'indice è $n=2$, per cui la disequazione è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 + 2x - 15 < (x - 1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ 4x - 16 < 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x \leq -5 \cup x \geq 3 \\ x > 1 \\ x < 4 \end{cases}$$



Soluzione: $3 \leq x < 4$

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

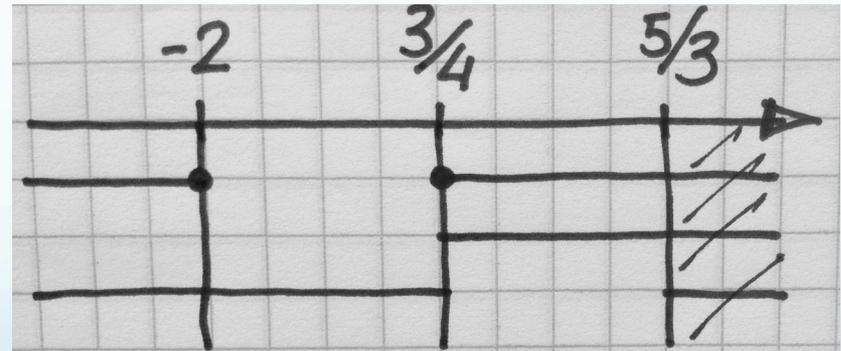
$$\sqrt{4x^2 + 5x - 6} < 4x - 3$$

L'indice è $n=2$, per cui la disequazione è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ 4x - 3 > 0 \\ 4x^2 + 5x - 6 < (4x - 3)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ 4x - 3 > 0 \\ 12x^2 - 29x + 15 > 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x \leq -2 \cup x \geq \frac{3}{4} \\ x > \frac{3}{4} \\ x < \frac{3}{4} \cup x > \frac{5}{3} \end{cases}$$



Soluzione: $x > \frac{5}{3}$ oppure $\left] \frac{5}{3}; +\infty \right[$

Consideriamo la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \quad n = 2$$

La soluzione della disequazione data è data dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Il primo sistema $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$ contiene una parte delle soluzioni: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \rightarrow \text{condizione esistenza radicale} \\ B(x) < 0 \rightarrow \text{condizione affinché la disequazione sia soddisfatta} \end{cases}$

Il secondo sistema $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$ contiene le restanti soluzioni: $\rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{se } B(x) \geq 0, \text{ entrambi i membri della disequazione} \\ \text{sono positivi o nulli, quindi, elevando al quadrato} \\ \text{otteniamo una disuguaglianza con lo stesso verso} \end{array} \right)$

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

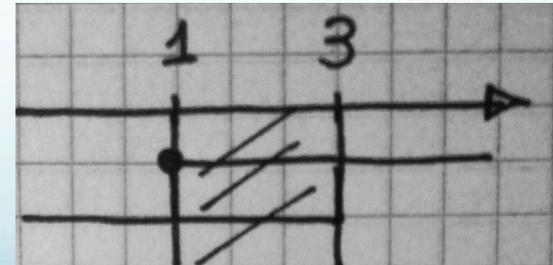
$$\sqrt{x-1} > x-3$$

La soluzione della disequazione data è data dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 > (x-3)^2 \end{cases}$$

Risolviamo i due sistemi:

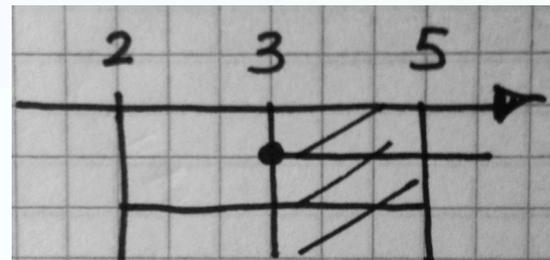
$$1^{\circ} \text{ sistema: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 3 \end{cases}$$



1^a Soluzione:

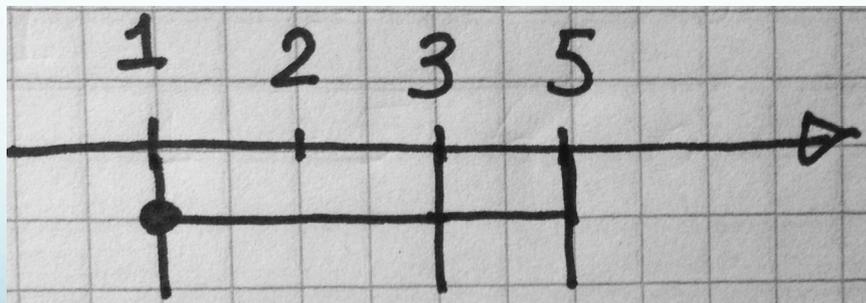
$$1 \leq x < 3$$

$$2^{\circ} \text{ sistema: } \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 10 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2 < x < 5 \end{cases}$$



2^a Soluzione: $3 \leq x < 5$

La soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei singoli sistemi:



soluzione

$$1 < x \leq 3 \cup 3 \leq x < 5 = 1 \leq x < 5$$

oppure

$$]1;3] \cup [3;5[= [1;5[$$

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

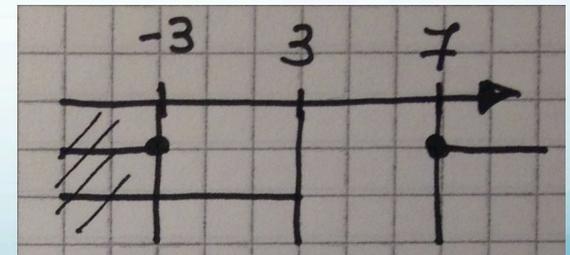
$$\sqrt{x^2 - 4x - 21} > x - 3$$

La soluzione della disequazione data è data dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 21 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 21 > (x - 3)^2 \end{cases}$$

Risolviamo i due sistemi:

$$1^\circ \text{ sistema: } \begin{cases} x^2 - 4x - 21 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 7 \\ x < 3 \end{cases}$$

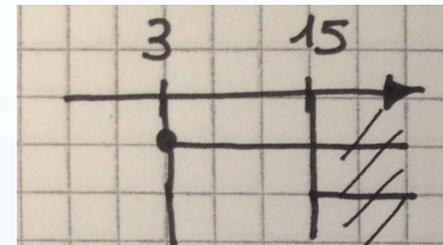


1^a Soluzione: $x \leq -3$

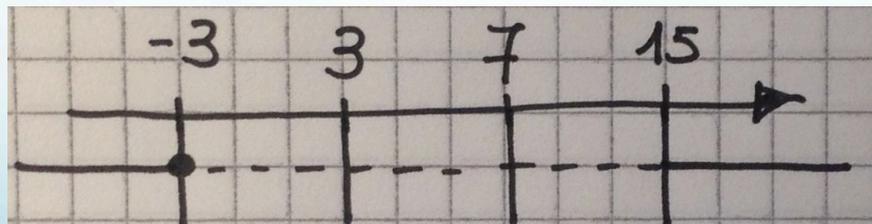
$$2^{\circ} \text{ sistema: } \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 21 > (x - 3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 2x > 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x > 15 \end{cases}$$

2^a Soluzione:

$$3 \leq x < 5$$



La soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei singoli sistemi:



soluzione

$$x \leq -3 \cup x > 15$$

oppure

$$]-\infty; -3] \cup [15; +\infty[$$